数理解析研究所講究録
1124巻 2000年 135-149

QUIVER VARIETIES AND FINITE DIMENSIONAL REPRESENTATIONS OF QUANTUM AFFINE ALGEBRAS

中島 啓 (HIRAKU NAKAJIMA)

講演では抽象的な話に終始したので, この報告では $\mathfrak{sl}_2$ の量子アファイン環の場合に限ることによって具体的な話をする. 実は, 以下の具体的な計算も証明の途中であるステップとして現れる.

1. Introduction

アファイン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ は, Kac-Moody Lie 環の例であり, 一般化された Cartan 行列 (例えば $A_1^{(1)}$ 型のときには $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$) に対して, 生成元と関係式で定義される. 可積分表現を調べるときには, この定義を使うのが便利であるが, 一方で $\widehat{\mathfrak{g}}$ は有限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}$ のループ Lie 環 $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ を中心拡大して, さらに次数作用素を付け加えたものという記述も可能である. すなわち,

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

であって, Lie 環の構造を

$$[\widehat{\mathfrak{g}}, c] = 0,$$
$$[X \otimes z^r, Y \otimes z^s] = [X, Y] \otimes z^{r+s} + r\delta_{r+s,0}(X, Y)c,$$
$$[d, X \otimes z^r] = rX \otimes z^r$$

で入れたものである. ただし, (X, Y) は $\mathfrak{g}$ 上のある adjoint 不変な内積である.

以下では, $\widehat{\mathfrak{g}}$ の有限次元表現を調べる. このとき, 中心 c は 0 で作用するので, ループ Lie 環 $\mathbf{L}\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ を考えれば十分である.

0 でない複素数 a に対し, Lie 環の準同型

$$\mathbf{L}\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}; \qquad X \otimes z^k \mapsto a^k X$$

を **evaluation 写像**といい, ev_a で表わす.

$\mathfrak{g}$ の表現 V を, ev_a を通じて $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ の表現と思ったものを $\mathrm{ev}_a^* V$ で表わす.

$\mathbf{L}\mathfrak{g}$ の有限次元表現は, 次のようにして完全に理解される.

定理 1.1. (1) $a_1, \dots, a_n$ を相異なる 0 でない複素数とし, $V_1, \dots, V_n$ を $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現とする. このとき

$$\mathrm{ev}_{a_1}^* V_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{ev}_{a_n}^* V_n$$

は $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現である.

(2) $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現は上のやり方で必ず得られる.

さて, 以上の q 類似を考えたい. 普遍展開環 $\mathbf{U}(\widehat{\mathfrak{g}})$ の 'q 類似' $\mathbf{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ は, アファイン量子展開環と呼ばれているが, $\widehat{\mathfrak{g}}$ に二通りの記述があったのと同様に, 二通りの記述が可能である.

一つは, $\widehat{\mathfrak{g}}$ の Kac-Moody Lie 環としての記述の 'q 類似' であり, Drinfeld-Jimbo による対称化可能な Kac-Moody Lie 環に対する量子展開環の定義を使うものである. もう一つは, Drinfeld

Supported by the Grant-in-aid for Scientific Research (No.11740011), the Ministry of Education, Japan and the National Science Foundation Grants #DMS 97-29992.

new realization と呼ばれているものであり, $\widehat{\mathfrak{g}}$ のループ Lie 環の拡大としての記述の 'q 類似' である.

二つの記述が同型であることは, Drinfeld[15] によってアナウンスされていたが, 詳しい証明は, Beck[5] によって与えられた.

ここでは, Drinfeld new realization を採用することとし, また有限次元表現を考察するので, 中心拡大しない量子ループ環 $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ を取り扱うことにする.

簡単のため $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のときを考える.

$\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ を次のようにして定義する. $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ は, e_r, f_r ($r \in \mathbb{Z}$), $q^{\pm h}$, h_m ($m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) を生成元とする $\mathbb{Q}(q)$-代数であって, 次の関係式を満たすものとする:

$$(z - q^{\pm 2}w)\psi^s(z)x^\pm(w) = (q^{\pm 2}z - w)x^\pm(w)\psi^s(z),$$
$$\left[x^+(z), x^-(w)\right] = \frac{1}{q_k - q_k^{-1}}\left\{\delta\left(\frac{w}{z}\right)\psi^+(w) - \delta\left(\frac{z}{w}\right)\psi^-(z)\right\},$$
$$(z - q^{\pm 2}w)x^\pm(z)x^\pm(w) = (q^{\pm 2}z - w)x^\pm(w)x^\pm(z),$$

ただし, 次の母関数を用いた:

$$\delta(z) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{r=-\infty}^{\infty} z^r, \qquad x^+(z) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_r z^{-r}, \qquad x^-(z) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{r=-\infty}^{\infty} f_r z^{-r},$$
$$\psi^\pm(z) \overset{\text{def.}}{=} q^{\pm h}\exp\left(\pm(q - q^{-1})\sum_{m=1}^{\infty} h_{\pm m} z^{\mp m}\right).$$

$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を $\mathfrak{sl}_2$ の生成元として取れば, $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ の $e \otimes z^r$, $f \otimes z^r$, $h \otimes z^m$ がそれぞれ e_r, f_r, h_m に対応し, $h \otimes z^0$ だけは q の肩に乗っけて q^h としたものである.

$\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の定義ができたら次に問題になるのは, 当然 (有限次元) 表現の構成, 分類である. 実は, 一般の $\mathfrak{g}$ にたいしては evaluation 写像が存在しないことが知られており, このために $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ の有限次元の構成 (定理 1.1) の類似がそのままでは成立しない. 筆者は, 最近箙多様体と呼ばれる空間を利用して, 有限次元表現を構成した. 残念ながら箙多様体の構成自体に準備が必要になるので, ここでは $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の場合に限ることによって, 筆者の構成を説明することにしたい. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の場合には対応する箙多様体は, グラスマン多様体の余接束となり, 極めて詳しくその性質を調べることができる. 現在までのところ, A_n 型以外のときには同様の記述は知られておらず, 箙多様体を調べるための道具も自分で用意する必要があった. なお, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ の場合は, 筆者よりも以前に Ginzburg-Vasserot[20, 56] の構成があり, 筆者も彼らの結果に動機づけされている.

2. $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の有限次元表現

この節では $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の場合に $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の有限次元表現を具体的に構成する. $\mathfrak{sl}_n$ の場合に拡張することは容易である.

2.1. **有限次元表現の構成.** 次の記号を用いる.

- $w \in \mathbb{Z}_{>0}$
- $a, b \in \mathbb{Z}$ で $a \le b$ となるものに対して, $[a, b] = \{a, a+1, \ldots, b\}$
- $\mathbf{R} = \mathbb{Q}(q)[x_1^\pm, \ldots, x_w^\pm]$
- S_w : w 次の対称群. 変数の入れ替えで $\mathbf{R}$ に作用する.
- $I = (I_1, I_2)$: $[1, w]$ の二つの集合への分割. すなわち, $I_1, I_2 \subset [1, w]$ であって, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $I_1 \cup I_2 = [1, w]$.

- $k \in I_1$ のとき, 新しい分割 $\tau_k^+(I)$ を $(I_1 \setminus \{k\}, I_2 \cup \{k\})$ で定義する. 同様に, $k \in I_2$ のとき新しい分割 $\tau_k^-(I)$ を $(I_1 \cup \{k\}, I_2 \setminus \{k\})$ で定義する.
- $S_I = S_{I_1} \times S_{I_2} \subset S_w$: I_1, I_2 のそれぞれを集合として保つ元からなる S_w の部分群
- $G \subset S_w$ が部分群のとき, G で不変な $\mathbf{R}$ の元の全体を R^G で表わす.
- $[v]$ は, 次の式で定義される $[1,w]$ の分割

$$[v] = \begin{cases} ([1,v],[v+1,w]) & 1 \le v < w \text{ のとき} \\ (\emptyset, [1,w]) & v \le 0 \text{ のとき} \\ ([1,w], \emptyset) & w \le v \text{ のとき} \end{cases}$$

- I, J を $[1,w]$ の二つの分割とするとき, 対称化作用素 $\mathfrak{S}_J^I \colon R^{S_I \cap S_J} \to R^{S_I}$ を

$$\mathfrak{S}_J^I f = \sum_{\sigma \in S_J / S_I \cap S_J} \sigma(f)$$

によって定義する. R の商体 $\mathcal{R}$ に対しても同じ式で対称化作用素を定義する.
- $I = (I_1, I_2) = (\{i_1, \ldots, i_v\}, \{j_1, \ldots, j_{w-v}\})$ と $f \in \mathbf{R}^{S_{[v]}}$ に対して

$$f(x_I) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_v}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{w-v}})$$

とおく.

$M = M(w) \stackrel{\text{def.}}{=} \bigoplus_{v=0}^{w} \mathbf{R}^{S_{[v]}}$ とおく. 作用素の母関数 $x^+(z) \colon \mathbf{R}^{S_{[v]}} \to \mathbf{R}^{S_{[v-1]}}$ を

$$\begin{aligned} x^+(z)f &= \mathfrak{S}_{[v]}^{[v-1]} \left(f \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left(\frac{x_v}{z}\right)^r \prod_{t \in [v+1,w]} \frac{qx_v - q^{-1}x_t}{x_v - x_t} \right) \\ &= \sum_{k \in [v,w]} f(x_{\tau_k^-[v-1]}) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left(\frac{x_k}{z}\right)^r \prod_{t \in [v,w] \setminus \{k\}} \frac{qx_k - q^{-1}x_t}{x_k - x_t} \end{aligned}$$

によって定義する. v を動かすことによって, M 上の作用素の母関数と見なす. 分数が入っているから, 右辺が $\mathbf{R}^{S_{[v-1]}}$ に入っていることは自明ではないがチェックできる.

同様に $x^-(w) \colon \mathbf{R}^{S_{[v-1]}} \to \mathbf{R}^{S_{[v]}}$ を

$$\begin{aligned} x^-(w)g &= \mathfrak{S}_{[v-1]}^{[v]} \left(g \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left(\frac{x_v}{w}\right)^s \prod_{u \in [1,v-1]} \frac{q^{-1}x_v - qx_u}{x_v - x_u} \right) \\ &= \sum_{l \in [1,v]} g(x_{\tau_l^+[v]}) \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left(\frac{x_l}{w}\right)^s \prod_{u \in [1,v] \setminus \{l\}} \frac{q^{-1}x_l - qx_u}{x_l - x_u} \end{aligned}$$

によって定める.

最後に $\psi^\pm(z) \colon \mathbf{R}^{S_{[v]}} \to \mathbf{R}^{S_{[v]}}$ を

$$\psi^\pm(z)f = \left(\prod_{u \in [1,v]} \frac{q^{-1}z - qx_u}{z - x_u} \prod_{t \in [v+1,w]} \frac{qz - q^{-1}x_t}{z - x_t} \right)^{\pm} f$$

によって定める. ただし, 右肩に $\pm$ を付けたものは, $z = \infty$ と $z = 0$ における Laurent 展開を表わす. (実際には, $z = \infty$, $z = 0$ では極を持たない.)

定理 2.1. 上の作用素により $M = M(w)$ 上に $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の表現が定まる.

各直和因子 $\mathbf{R}^{S_{[v]}}$ は, 掛け算により $\mathbf{R}^{S_w}$-加群の構造が入る. 上の定義から $x^{\pm}(z)$, $\psi^{\pm}(z)$ は $\mathbf{R}^{S_w}$-linear である. 環の準同型 $\chi\colon \mathbf{R}^{S_w} \to \mathbb{Q}(q)$ を取って $\mathbb{Q}(q)$ を $\mathbf{R}^{S_w}$-加群と見なし, 記号 $\mathbb{Q}(q)_\chi$ で表わす. そこで

$$M \otimes_{R^{S_w}} \mathbb{Q}(q)_\chi$$

を考えれば, $\mathbb{Q}(q)$ 上の $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群となる. 容易にチェックできるように

$$\dim_{\mathbb{Q}(q)} \mathbf{R}^{S_{[v]}} \otimes_{R^{S_w}} \mathbb{Q}(q)_\chi = \binom{w}{v}, \qquad \dim_{\mathbb{Q}(q)} M \otimes_{R^{S_w}} \mathbb{Q}(q)_\chi = \sum_{v=0}^{w} \binom{w}{v} = 2^w$$

が成り立つ. 特に, $M \otimes_{R^{S_w}} \mathbb{Q}(q)_\chi$ は有限次元の $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群である.

このようにして有限次元 $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群が構成できた. 環準同型 χ を決めるには, 初等対称多項式

$$e_1 = x_1 + \cdots + x_w, \quad e_2 = x_1x_2 + \cdots + x_{w-1}x_w, \quad \ldots, \quad e_w = x_1 \cdots x_w$$

の行き先を決めればよろしい. (ただし $\chi(e_w) \neq 0$ が必要.) 従って, 上の構成には, w 次元だけの自由度があることを注意しておこう. おおざっぱに言えば, $q=1$ の $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ のときの evaluation 表現 (定理 1.1) での a_i の取り方の自由度に対応する. またやがては, Drinfeld 多項式に対応していくことになる.

さて以下, M の $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群としての性質を調べよう. 個々の有限次元加群 $M \otimes_{R^{S_w}} \mathbb{Q}(q)_\chi$ についての性質は, M についての性質から従うことになる.

まず, M は特別な元 $1 \in R^{S_{[0]}}$ を持つことを注意しよう. 特別と言った意味は,

$$x^-(z) * 1 = 0$$

となることである. これは, 有限次元の $\mathfrak{g}$ の表現論で言うところの最高ウェイトベクトルに対応する条件の一つである. 他の条件は, Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ の同時固有ベクトルであること, 表現全体が 1 に $\mathfrak{g}$ の元を繰り返し作用させてできる元たちで張られていることであった. 今の場合, 前者の条件に対応するのは, $\psi^{\pm}(z)$ の固有ベクトルであると言うことだが, これは明らかに成り立っている. 実際

$$\psi^{\pm}(z) * 1 = \prod_{t \in [1,w]} \frac{qz - q^{-1}x_t}{z - x_t} = q^w \prod_{t \in [1,w]} \frac{1 - \frac{x_t}{q^2 z}}{1 - \frac{x_t}{z}} \tag{2.2}$$

である. (固有値は, $\mathbf{R}^{S_w}$ の元であることに注意しよう.

後者の条件も成り立つ. すなわち,

命題 2.3. M は‘最高ウェイト’加群である. すなわち, $1 \in R^{S_{[0]}}$ に $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の元を繰り返し作用させてできる元たちで $\mathbf{R}^{S_w}$ 上張られている.

証明は, Hall-Littlewood 多項式の定義([40] を見よ) と $x^+(z)$ の定義を見比べて, Hall-Littlewood 多項式が対称多項式の基底をなすことを使えば出来る.

$M \otimes_{R^{S_w}} \mathbb{Q}(q)_\chi$ も同様の性質を持つ. すなわち, $1 \in R^{S_{[0]}}$ に $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の元を繰り返し作用させてできる元たちで $\mathbb{Q}(q)$ 上張られている.

このような元を持つ $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群を l-**最高ウェイト加群**と呼ぼう. l は loop の l である.

Chari-Pressley[10] により, 次の定理が示されている.

定理 2.4. 単純な有限次元 l-最高ウェイト加群 $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ は, $\mathbb{Q}(q)$ 係数の多項式 $P(u) \in \mathbb{Q}(q)[u]$ でパラメトライズされる. 実際, $P(u)$ は l-最高ベクトル 1 の固有値

$$\psi^{\pm}(z) * 1 = q^{\deg P} \frac{P(q^{-1}/z)}{P(q/z)} 1$$

によって与えられる.

このような多項式でパラメトライズされることは, Yangian($=\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ を degenerate させたもの) について Drinfeld によって Chari-Pressley 以前にアナウンスされていたので, 上の多項式は Drinfeld 多項式と呼ばれる.

上で作った $M\otimes_{R^{S_w}}\mathbb{Q}(q)_\chi$ は既約であるとは限らないが, 既約な商をただ一つ持つことは容易に分かる. その既約な $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群に対応する Drinfeld 多項式は, (2.2) より

$$P(u)=\chi\left(\prod_{t\in[1,w]}\left(1-\frac{x_t}{q}u\right)\right)$$

で与えられる.

問題 2.5. $M\otimes_{R^{S_w}}\mathbb{Q}(q)_\chi$ を量子アファイン環 $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の有限次元表現の Grothendieck 群の中で, 単純な $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群の一次結合で表わしたとき, その係数を求めよ.

この問題に対するは, Lusztig の標準基底の理論を用いることによって, Kazhdan-Lusztig 多項式で表わされることが分かるのであるが, 残念ながらこの論説ではそこまで解説できない. あとで $M\otimes_{R^{S_w}}\mathbb{Q}(q)_\chi$ が既約になる十分条件を与えることにする.

2.2. **integral form.**

$$\mathbf{R}_\mathbb{Z}=\mathbb{Z}[q,q^{-1}][x_1^\pm,\dots,x_w^\pm]$$

とおく. 実は, 今までの話は, $\mathbf{R}$ の代わりに $\mathbf{R}_\mathbb{Z}$ でほとんどうまく行く.

定理 2.6. (1) $e_r^{(n)}=e_r^n/[n]_q!$, $f_r^{(n)}=f_r^n/[n]_q!$ (q-divided power), $q^{\pm h}$ および

$$p^\pm(z)=\exp\left(-\sum_{m=1}^\infty\frac{h_{\pm m}}{[m]_q}z^\mp\right)$$

の係数は, $M_\mathbb{Z}\overset{\text{def.}}{=}\bigoplus_{v=0}^w\mathbf{R}_\mathbb{Z}^{S_{[v]}}$ を保つ.

上の元で生成される $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-部分環を $\mathbf{U}_q^\mathbb{Z}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ とおく.

(2) $M_\mathbb{Z}$ は, $1\in\mathbf{R}_\mathbb{Z}^{S_{[0]}}$ に $\mathbf{U}_q^\mathbb{Z}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の元を繰り返し作用して出来る元たちで $\mathbf{R}_\mathbb{Z}^{S_w}$ 上張られている.

証明は, Hall-Littlewood 多項式が $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 上で対称多項式の基底になっていることに帰着してなされる.

よって環準同型 $\chi\colon\mathbf{R}_\mathbb{Z}^{S_w}\to\mathbb{C}$ に対し, 前と同様に $M_\mathbb{Z}\otimes_{\mathbf{R}_\mathbb{Z}^{S_w}}\mathbb{C}_\chi$ を考えると, 有限次元の l-最高ウェイト $\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群が得られる. ここで ε は χ による q の行き先で, $\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ は $\mathbf{U}_q^\mathbb{Z}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ を $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]\ni q\mapsto\varepsilon\in\mathbb{C}^*$ によって特殊化したものである.

このように定式化しておけば ε が 1 のべき根のときでも $M_\mathbb{Z}\otimes_{\mathbf{R}_\mathbb{Z}^{S_w}}\mathbb{C}_\chi$ が定義される. 量子展開環 $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ の表現論は ε が 1 のべき根のときとそうでないときで大きく様相が異なることが観察されており, 量子アファイン展開環についても同様の観察をすることは, 意味があることと思われる.

3. 同変 K-群による CONVOLUTION ALGEBRA

3.1. **同変 K-群に関する簡単なまとめ.** X を $\mathbb{C}$ 上の quasi-projective scheme とし, 線型代数群 G が作用しているとする. このとき, X 上の G 同変な連接層のなすアーベル圏の Grothendieck 群を $K^G(X)$ で表わす. 同変 K-ホモロジーと呼ばれる. また, G 同変な正則ベクトル束のなすアーベル圏の Grothendieck 群を $K_G^0(X)$ で表わす. 同変 K-コホモロジーと呼ばれる. それぞれ

位相空間に対するホモロジー群(より正確には，局所有限なチェインからできるホモロジー群，いわゆる Borel-Moore ホモロジー群である)とコホモロジー群の類似である．

特に，X が一点のとき，$K^G(X)$ と $K_G^0(X)$ は同型となるが，これを G の表現環といい，$R(G)$ で表わす．

正則写像 $f\colon X \to Y$ は引き戻し写像 $f^*\colon K_G^0(Y) \to K_G^0(X)$ を引き起こし，さらに f が proper ならば押し出し写像 $f_*\colon K^G(X) \to K^G(Y)$ が定義される．

$K_G^0(X)$ は，ベクトル束のテンソル積により環構造を持つが，上の f^* は，環準同型になる．特に，f として X から一点への写像を取れば，$K_G^0(X)$ はつねに $R(G)$-代数の構造を持つことがわかる．また，ベクトル束と連接層のテンソル積により $K^G(X)$ は，$K_G^0(X)$-加群の構造を持つ．しかし，$K^G(X)$ 自身には一般には環構造は定義されない．それは，テンソル積を取る関手が exact でないためである．

また，正則ベクトル束を(局所自明な)連接層と思うことにより自然な写像 $K_G^0(X) \to K^G(X)$ が定義される．さらに X が非特異であれば，この写像は同型になる．この事実は，ホモロジー群とコホモロジー群のの Poincaré 双対定理の類似であるが，証明は任意の G 同変な連接層 $\mathcal{F}$ が G-同変な有限局所自由分解

$$0 \to E_n \to E_{n-1} \to \cdots \to E_0 \to \mathcal{F} \to 0$$

を持つことからの帰結である．ただし上は，E_i は G 同変な正則ベクトル束で，境界作用素は G 同変であるような完全系列である．実際，このとき逆写像は，$\mathcal{F}$ に対して $\sum(-1)^i E_i$ を対応させることで与えられる．

Y が X の closed subvariety であり，X が nonsingular なとき，$K_G(X;Y)$ を X 上の G 同変な正則ベクトル束の複体で，Y の外では exact であるもののなす三角圏の Grothendieck 群とする．上の同型 $K_G^0(X) \cong K^G(X)$ と同様にして，同型 $K_G(X;Y) \cong K^G(Y)$ が得られる．

$Y_1, Y_2 \subset X$ を closed subvarieties とするとき，$E_1^\bullet \in K_G(X;Y_1)$, $E_2^\bullet \in K_G(X;Y_2)$ に対して，二重複体 $E_1^\bullet \otimes E_2^\bullet$ を考えることによって，$K_G(X;Y_1 \cap Y_2)$ の元が定められる．上の同型を通じて

$$K^G(Y_1) \times K^G(Y_2) \to K^G(Y_1 \cap Y_2)$$

が定義される．これを **torsion product** といい，$\cdot \otimes_X^L \cdot$ によって表わす．

命題 3.1. Y_1, $Y_2 \subset X$ を nonsingular な G-subvarieties で，その conormal bundles を $T_{Y_1}^*X$, $T_{Y_2}^*X$ で表わす．Y_1 と Y_2 の交叉 $Y \overset{\text{def.}}{=} Y_1 \cap Y_2$ は非退化であり，$TY_1|_Y \cap TZ_2|_Y = TY$ が成り立つと仮定しよう．ただし，$|_Y$ は Y への制限を意味する．このとき $E_1 \in K_G^0(Y_1) \cong K_0^G(Y_1)$, $E_2 \in K_G^0(Y_2) \cong K_0^G(Y_2)$ に対して

$$E_1 \otimes_X^L E_2 = \sum_i (-1)^i \bigwedge^i N \otimes E_1|_Y \otimes E_2|_Y \in K_G^0(Y) \cong K_0^G(Y),$$

が成り立つ．ただし $N \overset{\text{def.}}{=} T_{Y_1}^*X|_Y \cap T_{Y_2}^*X|_Y$ である．

$f\colon X \to Y$ は，nonsingular variety X, Y の間の morphism で，$X' \subset X$, $Y' \subset Y$ は closed subvarieties で，$f^{-1}(Y') \subset X'$ をみたすとする．このとき，引き戻し写像 $f^*\colon K_G(Y;Y') \to K_G(X;X')$ は，上の同型を通じて $K^G(Y') \to K^G(X')$ を導く．これも単に f^* で表わす．

3.2. **同変 K 群の局所化定理.** A を簡約なアベール代数群とする．$a \in A$ に対し，$\chi_a\colon R(A) \to \mathbb{C}$ を，表現の指標の a での値を考えることにより定められる写像とする．明らかに環準同型であり，この準同型により $\mathbb{C}$ を $R(A)$-代数と思ったものを $\mathbb{C}_a$ で表わす．$\chi_a(f) \neq 0$ となる $f \in R(A)$ の全体のなす積閉集合で，$R(A)$-加群 M を局所化したものを M_a で表わすことにする．

さて，A が X に作用しているとする．a で固定されている点全体の成す集合を X^a で表わす．この集合には A の作用が誘導されるので，同変 K-ホモロジー群 $K^A(X^a)$ が考えられる．このとき，Thomason[53] は次を示した．

定理 3.2. 包含写像 $i\colon X^a \to X$ は, 局所化された同変 K-ホモロジーの間の同型を導く:

$$i_*\colon K^A(X^a)_a \xrightarrow{\cong} K^A(X)_a$$

さらに X は非退化であるとする. このとき X^a も非退化である. 同型 $K^A(X) \cong K_A^0(X)$, $K^A(X^a) \cong K_A^0(X^a)$ により,

$$i^*\colon K^A(X) \to K^A(X^a)$$

が定義される.

補題 3.3. (1) $i^*i_*\colon K^A(X^a) \to K^A(X^a)$ は,

$$\bigwedge\nolimits_{-1} N^* \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^{\operatorname{rank} N^*} (-1)^i \bigwedge\nolimits^i N^*$$

を掛ける作用素と等しい. ただし, N は, $X^a \subset X$ の法束を $K^A(X^a)$ の元と思ったものであり, N^* はその双対である.

(2) i^*i_* は, 局所化同変 K 群 $K^A(X^a)_a$ 上の作用素として可逆である.

(1) は, deformation to normal bundle で X が X^a 上のベクトル束の場合に帰着され, さらにその場合には Koszul complex を使うことによって示される. (2) は, 次のように示される. 一点 $x \in X^a$ を取り, その点での N のファイバー N_x を A の表現として V で表わす. (V は x の属している X^a の連結成分にしかよらない.) $X^a \times V$ を X^a 上の自明なベクトル束に, A の作用を与えたものと考え, N' とおく. このとき, 上で考えた N に対応する作用素 $\bigwedge_{-1} N^*$ と N'^* に対して同様に考えた作用素 $\bigwedge_{-1} N'^*$ の差は巾零であり, さらに $\bigwedge_{-1} N'^*$ は可逆であることがわかる. したがって, (2) が従う.

系 3.4. 上の仮定のもと, $(\bigwedge_{-1} N^*)^{-1} i^*\colon K^A(X) \to K^A(X^a)$ は同型であり, i_* の逆を与える.

3.3. 旗多様体の同変 K 群. 非減少自然数列 $v_1 \le v_2 \le \cdots \le v_n \le w$ に対して (一般化された) 旗多様体

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}(v_1, \ldots, v_n; w)\\ &= \{0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset \mathbb{C}^w \mid E_i \text{ は, } \mathbb{C}^w \text{ の部分空間で } \dim E_i = v_i\}\end{aligned}$$

を考える. これは $\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})$ の等質空間で, $\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})/P$ と書ける. ただし, $P = P(v_1, \ldots, v_n; w)$ は, $\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})$ の部分群で,

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad A_{ij} \text{ は, } v_i \times v_j \text{ 型行列}$$

の形の行列全体である.

命題 3.5. $\mathcal{F}(v_1, \ldots, v_n; w)$ の $\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})$-同変 K 群は次で与えられる.

$$K^{\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(\mathcal{F}(v_1, \ldots, v_n; w)) \cong R(P) \cong \mathbb{Z}[x_1^{\pm}, \ldots, x_w^{\pm}]^{S_{v_1} \times S_{v_2 - v_1} \times \cdots \times S_{w - v_n}}$$

となる. ただし $S_{v_1} \times S_{v_2 - v_1} \times \cdots \times S_{w - v_n}$ は, $x_1, \ldots, x_w$ のうち, 最初の v_1 個の入れかえ, 次の $v_2 - v_1$ 個の入れかえ, ... で作用する.

以下, 簡単のため $n=1$ または 2 のときだけを考えることにする.
自然な射影

$$(3.6)\qquad \begin{aligned} P_1\colon \mathcal{F}(v_1,v_2;w) &\to \mathcal{F}(v_1;w); \qquad (E_1\subset E_2\subset \mathbb{C}^w)\mapsto (E_1\subset \mathbb{C}^w)\\ P_2\colon \mathcal{F}(v_1,v_2;w) &\to \mathcal{F}(v_2;w); \qquad (E_1\subset E_2\subset \mathbb{C}^w)\mapsto (E_2\subset \mathbb{C}^w)\end{aligned}$$

がある.
上の命題 3.5 により

$$(3.7)\qquad \begin{aligned} K^{\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(\mathcal{F}(v_1,v_2;w)) &\cong \mathbb{Z}[x_1^\pm,\dots,x_w^\pm]^{S_{[v_1]}\cap S_{[v_2]}},\\ K^{\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(\mathcal{F}(v_1;w)) &\cong \mathbb{Z}[x_1^\pm,\dots,x_w^\pm]^{S_{[v_1]}},\\ K^{\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(\mathcal{F}(v_2;w)) &\cong \mathbb{Z}[x_1^\pm,\dots,x_w^\pm]^{S_{[v_2]}}\end{aligned}$$

という同型が存在する. ただし, §2.1 の記号 S_I を用いた.

命題 3.8. (1) P_1 による引き戻し写像

$$P_1^*\colon K^{\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(\mathcal{F}(v_1;w)) \to K^{\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(\mathcal{F}(v_1,v_2;w))$$

は, (3.7) を通じて自然な写像

$$\mathbb{Z}[x_1^\pm,\dots,x_w^\pm]^{S_{[v_1]}} \to \mathbb{Z}[x_1^\pm,\dots,x_w^\pm]^{S_{[v_1]}\cap S_{[v_2]}}$$

に等しい. P_2 についても同様の結論が成り立つ.
(2) P_1 による押し出し写像

$$P_{1*}\colon K^{\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(\mathcal{F}(v_1,v_2;w)) \to K^{\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(\mathcal{F}(v_1;w))$$

は, (3.7) を通じて写像

$$f\mapsto \sum_{\sigma\in S_{[v_1]}/S_{[v_1]}\cap S_{[v_2]}} \sigma\cdot\left(f\prod_{\substack{t\in[v_2,w]\\ v\in[v_1+1,v_2]}}\left(1-\frac{x_v}{x_t}\right)^{-1}\right)$$

に等しい. P_2 についても同様に

$$f\mapsto \sum_{\sigma\in S_{[v_2]}/S_{[v_1]}\cap S_{[v_2]}} \sigma\cdot\left(f\prod_{\substack{u\in[1,v_1]\\ v\in[v_1+1,v_2]}}\left(1-\frac{x_u}{x_v}\right)^{-1}\right)$$

に等しい.

$\sum\sigma$ の部分は, §2 の対称化作用素 $\mathfrak{S}$ に他ならないことを注意しておこう.
証明は, Borel-Weil 理論から従うが, 同変 K 群の局所化定理を用いて証明できることを注意しておこう.

3.4. **合成積.** X_1, X_2, X_3 を非特異な準射影多様体とし, $p_{ab}\colon X_1\times X_2\times X_3\to X_a\times X_b$ を射影とする. $((a,b)=(1,2),(2,3),(1,3))$.
Z_{12} (resp. Z_{23}) を $X_1\times X_2$ (resp. $X_2\times X_3$) の closed subvariety とし, 射影の制限 $p_{13}\colon p_{12}^{-1}(Z_{12})\cap p_{23}^{-1}(Z_{23})\to X_1\times X_3$ は proper であると仮定する. このとき, $Z_{12}\circ Z_{23}=p_{13}\left(p_{12}^{-1}(Z_{12})\cap p_{23}^{-1}(Z_{23})\right)$ とおく. **合成積** $*\colon K(Z_{12})\times K(Z_{23})\to K(Z_{12}\circ Z_{23})$ を

$$K_{12}*K_{23}\overset{\text{def.}}{=} p_{13*}\left(p_{12}^*K_{12}\otimes^L_{X_1\times X_2\times X_3} p_{23}^*K_{23}\right)\qquad \text{ただし } K_{12}\in K(Z_{12}), K_{23}\in K(Z_{23}).$$

によって定義する．この operation は結合律をみたす．

X_1, X_2, X_3 に群 G が作用し，Z_{12}, Z_{23} が G で不変ならば，

$$*\colon K^G(Z_{12}) \times K^G(Z_{23}) \to K^G(Z_{12} \circ Z_{23})$$

が定義される．これは，$R(G)$-線型である．

さらに，作用している群 G が，簡約なアベール代数群 A である状況を考える．上の合成積の他に，$a \in A$ を取って固定点集合 X_1^a, X_2^a, X_3^a, Z_{12}^a, Z_{23}^a を考えても，合成積

$$*\colon K^A(Z_{12}^a) \times K^A(Z_{23}^a) \to K^A(Z_{12}^a \circ Z_{23}^a)$$

が定義される．一方，§3.2 により，$K^A(Z_{12}^a)$, etc と $K^A(Z_{12}^a)$, etc は，局所化すれば同型になる．二つの合成積の間は次で結ばれる．

定理 3.9. 次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
K^A(Z_{12})_a \times K^A(Z_{23})_a \arrow[r, "*"] \arrow[d, "(1\boxtimes(\bigwedge_{-1} N_2^*)^{-1})i_{12}^* \times (1\boxtimes(\bigwedge_{-1} N_3^*)^{-1})i_{23}^*"', "\cong"] & K^A(Z_{12} \circ Z_{23})_a \arrow[d, "\cong"', "(1\boxtimes(\bigwedge_{-1} N_3^*)^{-1})i_{13}^*"] \\
K^A(Z_{12}^a)_a \times K^A(Z_{23}^a)_a \arrow[r, "*"] & K^A(Z_{12}^a \circ Z_{23}^a)_a
\end{tikzcd}$$

ただし，i_{ij}^* は引き戻し写像 $i_{ij}^*\colon K^A(Z_{ij}) \cong K_A^0(M_i \times M_j; Z_{ij}) \to K_A^0(M_i^a \times M_j^a; Z_{ij}^a) \cong K^A(Z_{ij}^a)$ であり，N_i は $M_i^a \subset M_i$ の法束である．

証明は容易であるが，法束の半分 $1 \boxtimes (\bigwedge_{-1} N_i^*)^{-1}$ を掛けるとちょうどうまく行くことがポイントである．

K 群の代わりにホモロジー群 (ただし，通常のものでなく，局所有限なチェインから作られるホモロジー群，いわゆる Borel-Moore ホモロジー群を用いる) H_* を用いても合成積を考えることができる:

$$H_*(Z_{12}, \mathbb{C}) \times H_*(Z_{23}, \mathbb{C}) \to H_*(Z_{12} \circ Z_{23}, \mathbb{C}).$$

ベクトル束の K-コホモロジー群と通常のコホモロジー群の間には，Chern 指標と呼ばれる環準同型がある:

$$\mathrm{ch}\colon K^0(X) \to H^*(X, \mathbb{C}).$$

X が非退化な多様体 M に埋め込まれているときには，K-ホモロジーと Borel-Moore ホモロジーの間に同様の Chern 指標が定義される:

$$K(X) \cong K^0(M, X) \xrightarrow{\mathrm{ch}} H^*(M, M \setminus X, \mathbb{C}) \cong H_*(X, \mathbb{C}).$$

(特異な多様体に対する)Riemann-Roch の定理を用いると，次が成立する．

定理 3.10. 次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
K(Z_{12}) \times K(Z_{23}) \arrow[r, "*"] \arrow[d, "(1\boxtimes \mathrm{td}_{M_2})\,\mathrm{ch} \times (1\boxtimes \mathrm{td}_{M_3})\,\mathrm{ch}"'] & K(Z_{12} \circ Z_{23}) \arrow[d, "(1\boxtimes \mathrm{td}_{M_3})\,\mathrm{ch}"] \\
H_*(Z_{12}, \mathbb{C}) \times H_*(Z_{23}, \mathbb{C}) \arrow[r, "*"] & H_*(Z_{12} \circ Z_{23}, \mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

ただし，td_{M_i} は M_i の Todd 類である．

4. §2 の構成の同変 K 群による解釈

$\mathbb{C}^*$ の表現環 $R(\mathbb{C}^*)$ は $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ と同型である．ここで q は $\mathbb{C}^*$ の恒等写像が定める $\mathbb{C}^*$ の一次元表現である．以下，q はこの意味で理解する．

$\mathbb{C}^w$ の中の v 次元部分空間のなす Grassmann 多様体 $\mathcal{F}(v;w)$ の余接束 $T^*\mathcal{F}(v;w)$ を考えよう．$\mathcal{F}(v,w)$ への $\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})$ の作用が $T^*\mathcal{F}(v;w)$ への 作用に自然に持ち上がる．また，$T^*\mathcal{F}(v;w)\to\mathcal{F}(v;w)$ の各ファイバーごとのスカラー倍の作用によって $\mathbb{C}^*$ も作用する．ただしあとの都合上，$t\in\mathbb{C}^*$ は t^2 倍で作用するとする． $\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})$ と $\mathbb{C}^*$ の作用は可換であり，$T^*\mathcal{F}(v;w)$ には $\mathbb{C}^*\times\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})$ が作用する．

§3.3 で $\mathcal{F}(v_1,v_2;w)$ を考えた．$\mathfrak{P}(v,w)$ を $\mathcal{F}(v-1,v;w)$ の $\mathcal{F}(v-1;w)\times\mathcal{F}(v;w)$ 内における conormal bundle としよう．ただし，$\mathcal{F}(v-1;w)\times\mathcal{F}(v;w)$ の余接束 $T^*\mathcal{F}(v-1;w)\times T^*\mathcal{F}(v;w)$ のシンプレクティク形式は，第二成分の符号を変えたものを使う．

前節の合成積を

- $X_1=T^*\mathcal{F}(v-1;w)$, $X_2=T^*\mathcal{F}(v;w)$, $X_3=$ 一点
- $Z_{12}=\mathfrak{P}(v,w)$, $Z_{23}=\mathcal{F}(v;w)$ (ただし $\mathcal{F}(v;w)$ は $T^*\mathcal{F}(v;w)$ の 0-切断として入っている)

で考える．仮定: $p_{13}\colon p_{12}^{-1}(Z_{12})\cap p_{23}^{-1}(Z_{23})\to X_1\times X_3$ は proper は成立し，

$$Z_{12}\circ Z_{23}=p_{13}\left(p_{12}^{-1}(Z_{12})\cap p_{23}^{-1}(Z_{23})\right)=\mathcal{F}(v-1;w)$$

となっている．よって合成積

$$*\colon K^{\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{P}(v,w))\times K^{\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*}(\mathcal{F}(v;w))\to K^{\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*}(\mathcal{F}(v-1;w)) \tag{4.1}$$

が定義される．

同様に，

$$*\colon K^{\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{P}(v,w))\times K^{\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*}(\mathcal{F}(v-1;w))\to K^{\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*}(\mathcal{F}(v;w)) \tag{4.2}$$

も定義される．

$\mathbb{C}^*$ が $\mathcal{F}(v;w)$ に自明に作用していることから $K^{\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*}(\mathcal{F}(v;w))\cong K^{\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(\mathcal{F}(v;w))\otimes R(\mathbb{C}^*)$ となり，同型 $R(\mathbb{C}^*)\cong\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ および命題 3.5 から

$$K^{\mathbb{C}^*\times\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(\mathcal{F}(v;w))\cong\mathbf{R}_{\mathbb{Z}}^{S_{[v]}} \tag{4.3}$$

が成立する．

また，Thom 同型 $K^{\mathbb{C}^*\times\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(\mathfrak{P}(v,w))\cong K^{\mathbb{C}^*\times\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(\mathcal{F}(v-1,v;w))$ と，$\mathbb{C}^*$ が $\mathcal{F}(v-1,v;w)$ に自明に作用していること，および命題 3.5 から

$$K^{\mathbb{C}^*\times\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(\mathfrak{P}(v,w))\cong\mathbf{R}_{\mathbb{Z}}^{S_{[v]}\cap S_{[v-1]}} \tag{4.4}$$

が成り立つ．

定理 4.5. (4.3),(4.4) のもと，合成積(4.1) は

$$\mathbf{R}_{\mathbb{Z}}^{S_{[v]}\cap S_{[v-1]}}\times\mathbf{R}_{\mathbb{Z}}^{S_{[v]}}\ni(K,f)\longmapsto\mathfrak{S}_{[v]}^{[v-1]}\left(Kf\prod_{t=v+1}^{w}\left(1-\frac{x_v}{x_t}\right)^{-1}\left(1-q^{-2}\frac{x_t}{x_v}\right)\right)\in\mathbf{R}_{\mathbb{Z}}^{S_{[v-1]}}$$

で与えられる．

系 4.6. $\mathbf{R}_{\mathbb{Z}}^{S_{[v]}\cap S_{[v-1]}}$ に係数を持つ母関数

$$K(z)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left(\frac{x_v}{z}\right)^r\prod_{t=v+1}^{w}\left(-\frac{qx_v}{x_t}\right)$$

を考えると, $K(z)$ を合成積によってかける作用素 $\mathbf{R}_{\mathbb{Z}}^{S_{[v]}} \to \mathbf{R}_{\mathbb{Z}}^{S_{[v-1]}}$ は, §2.1 の $x^+(z)$ に一致する.

定理 4.5 の証明. 今 X_3 は一点であるから, 記号を簡単にして

$$p_1 \colon T^*\mathcal{F}(v-1;w) \times T^*\mathcal{F}(v;w) \to T^*\mathcal{F}(v-1;w)$$
$$p_2 \colon T^*\mathcal{F}(v-1;w) \times T^*\mathcal{F}(v;w) \to T^*\mathcal{F}(v;w)$$

を用いよう.

命題 3.1 を

- $X = T^*\mathcal{F}(v-1;w) \times T^*\mathcal{F}(v;w)$
- $Y_1 = T^*\mathcal{F}(v-1;w) \times \mathcal{F}(v;w)$
- $Y_2 = \mathfrak{P}(v,w)$

で用いよう. このとき命題 3.1 の仮定は, 成立している. このとき $Y = Y_1 \cap Y_2$ は, $\mathcal{F}(v-1,v;w)$ と同型である. ($\mathcal{F}(v-1,v;w)$ は, $\mathcal{F}(v-1;w) \times \mathcal{F}(v;w)$ を通じて X の中に入っている.) さらに, N は射影 $P_1 \colon \mathcal{F}(v-1,v;w) \to \mathcal{F}(v-1;w)$ のファイバーに沿った接束 TP_1 に同型である. したがって, $E_1 \in K^{\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{P}(v,w))$, $E_2 \in K^{\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*}(\mathcal{F}(v;w))$ に対して,

$$E_1 \otimes^L_{T^*\mathcal{F}(v-1;w)\times T^*\mathcal{F}(v;w)} p_2^* E_2 = \sum_i (-1)^i {\textstyle\bigwedge}^i TP_1 \otimes E_1|_{\mathcal{F}(v-1,v;w)} \otimes P_2^* E_2$$

が成り立つ.

同型 $K^{\mathbb{C}^*\times\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(\mathcal{F}(v-1,v;w)) \cong \mathbf{R}_{\mathbb{Z}}^{S_{[v]}\cap S_{[v-1]}}$ によって, TP_1 は $\sum_{t=v+1}^{w} x_t/x_v$ にうつされる. ただし, 命題 3.1 の証明 (省略したが) には, Thom 同型 $K^{\mathbb{C}^*\times\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(\mathfrak{P}(v,w)) \cong K^{\mathbb{C}^*\times\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(\mathcal{F}(v-1,v;w))$ を通じて $K^{\mathbb{C}^*\times\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(\mathcal{F}(v-1,v;w))$ の元とみなし, その Koszul complex を考える. 特に, 同変な Koszul complex が必要なために, $\mathbb{C}^*$ の一次元表現 q^{-2} をテンソル積しておく必要がある. したがって, $TP_1 = q^{-2}\sum_{t=v+1}^{w} x_t/x_v$ となる. よって

$$\sum_i (-1)^i {\textstyle\bigwedge}^i TP_1 = \prod_{t=v+1}^{w} \left(1 - q^{-2}\frac{x_t}{x_v}\right)$$

となる.

あとは, 命題 3.8 と組み合わせて結論を得る. □

全く同様にして合成積(4.2) は,

$$\mathbf{R}_{\mathbb{Z}}^{S_{[v]}\cap S_{[v-1]}} \times \mathbf{R}_{\mathbb{Z}}^{S_{[v-1]}} \ni (K',g) \longmapsto \mathfrak{S}_{[v-1]}^{[v]}\left(K'g\prod_{u=1}^{v}\left(1-\frac{x_u}{x_v}\right)^{-1}\left(1-q^{-2}\frac{x_v}{x_u}\right)\right) \in \mathbf{R}_{\mathbb{Z}}^{S_{[v]}}$$

で与えられる. 系 4.6 についても同様に

$$K'(w) = \sum_{s=-\infty}^{\infty}\left(\frac{x_v}{w}\right)^s \prod_{u=1}^{v}\left(-\frac{qx_u}{x_v}\right)$$

を取れば, 合成積によって $K'(w)$ をかける作用素が $x^-(w)$ に一致する.

これらをまとめて, 次のように考えることができる.

- $M = \bigsqcup_v T^*\mathcal{F}(v;w) = \bigsqcup_v \{(V,n) \in \mathcal{F}(v;w) \times \mathfrak{gl}_w(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Im}(n) \subset V, n(V) = 0\}$
- $X = \{n \in \mathfrak{gl}_w(\mathbb{C}) \mid n^2 = 0\}$
- $\pi \colon M \to X$ 自然な射影
- $Z = M \times_X M = \{(m_1,m_2) \in M \times M \mid \pi(m_1) = \pi(m_2)\}$

とおく. Z を $M\times M$ の部分多様体と考えて, §3.4の構成を適用する. $Z\circ Z=Z$ が成り立つから, 合成積

$$*\colon K^{\mathbb{C}^*\times \mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(Z)\otimes K^{\mathbb{C}^*\times \mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(Z)\to K^{\mathbb{C}^*\times \mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(Z)$$

によって, $K^{\mathbb{C}^*\times \mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(Z)$ は $R(\mathbb{C}^*\times \mathrm{GL}_w(\mathbb{C}))$-代数の構造を持つ. また, $Z\circ\pi^{-1}(0)=\pi^{-1}(0)$ であり, やはり合成積

$$*\colon K^{\mathbb{C}^*\times \mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(Z)\otimes K^{\mathbb{C}^*\times \mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(\pi^{-1}(0))\to K^{\mathbb{C}^*\times \mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(\pi^{-1}(0))$$

によって, $K^{\mathbb{C}^*\times \mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(\pi^{-1}(0))$ は $K^{\mathbb{C}^*\times \mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(Z)$-加群となる.

このとき

- 代数の準同型 $\mathbf{U}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})\to K^{\mathbb{C}^*\times \mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(Z)$ があり,
- $K^{\mathbb{C}^*\times \mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(Z)$-加群 $K^{\mathbb{C}^*\times \mathrm{GL}_w(\mathbb{C})}(\pi^{-1}(0))$ は, この準同型を通じて $\mathbf{U}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群となるが, それは§2.2で構成した $\mathbf{U}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群 $M_{\mathbb{Z}}$ と同型である.

上の準同型の構成には, 今までの議論で $\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})\to K^{\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*}(Z)\otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]}\mathbb{Q}(q)$ ができているので, $\mathbf{U}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ が $K^{\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*}(Z)$ にされていることをチェックすればよい. これは§3.3の結果を用いれば容易である.

5. 局所化

$\pi\colon M\to X$, $Z=M\times_X M$ は前節の通りとする.

§2.2の構成において, 環準同型 $\chi\colon \mathbf{R}_{\mathbb{Z}}^{S_w}\to\mathbb{C}$ に対し, 局所化を考えたことを思い出そう. 前節の幾何学的構成との比較において, $\mathbf{R}_{\mathbb{Z}}^{S_w}$ は $\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*$ の表現環 $R(\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*)$ と同一視された. すると, χ を与えることは, $\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*$ の半単純な元 $a=(s,\varepsilon)$ を与えることと一対一に対応する. すなわち, χ は表現に対しその指標の a での値を対応させる写像である.

A を $a^{\mathbb{Z}}$ の Zariski 閉包とする. A は, 簡約なアーベル代数群である. また, A は $\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*$ の部分群である. $\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*$ の作用を A の作用に制限することで $R(A)$-準同型

$$K^{\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*}(Z)\to K^A(Z)$$

が得られる.

χ は $R(A)$ から $\mathbb{C}$ への準同型とも思えることに注意して, 定理3.9を適用すると, $R(A)$-代数の準同型

$$(1\boxtimes{\textstyle\bigwedge_{-1}}N^*)^{-1}i^*\colon K^A(Z)_a\to K^A(Z^a)_a$$

が存在する. ただし, $i\colon M^a\times M^a\to M\times M$ は包含写像で, N は, $M^a\subset M$ の法束である.

Z^a への A の作用が自明であることから $K^A(Z^a)\cong K(Z^a)\otimes R(A)$ である. そこで

$$\mathrm{ev}_a\colon K^A(Z^a)_a\cong K(Z^a)\otimes R(A)_a\to K(Z^a)\otimes\mathbb{C}$$

を $F\otimes(f/g)$ を $F\otimes\chi(f)/\chi(g)$ を対応させてできる写像としよう. これは, 合成積に関し代数の準同型である.

さらに定理3.10によって

$$(1\boxtimes\mathrm{td}_{M^a})\,\mathrm{ch}\colon K(Z^a)\otimes\mathbb{C}\to H_*(Z^a,\mathbb{C})$$

は代数の準同型である. ただし ch は $Z^a\subset M^a\times M^a$ に対して考えた.

以上の準同型と $\mathbf{U}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})\to K^{\mathrm{GL}_w(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*}(Z)$ を合成することによって, 代数の準同型

$$\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{L}\mathfrak{g})=\mathbf{U}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbf{L}\mathfrak{g})\otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]}\mathbb{C}\to H_*(Z^a,\mathbb{C}) \tag{5.1}$$

が得られた. ただし $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]\to\mathbb{C}$ は q を ε にうつす準同型である.

実は一般の a について, $H_*(Z^a,\mathbb{C})$ を調べる処方箋があるのだが ([13, 第8章] 参照), ここでは簡単な場合だけ述べることにしよう.

補題 5.2. $a=(s,\varepsilon)$ が次の条件をみたすとする.

(5.3) s の固有値 λ, μ に対して $\lambda/\mu \neq \varepsilon^2$ である.

このとき $X^a=\{0\}$ である.

証明. 定義から

$$X^a = \{n \in \mathfrak{gl}_w(\mathbb{C}) \mid n^2 = 0,\ sns^{-1} = \varepsilon^2 n\}$$

である. s の固有値 λ の固有空間を $V(\lambda)$ で表わすと, n は $V(\lambda)$ を $V(\varepsilon^2\lambda)$ にうつす. よって仮定から n は 0 である. □

以下, 上の条件を仮定する. $Z^a = M^a \times_{X^a} M^a$ であるから, 上の補題により $Z^a = M^a \times M^a$ となる. また M^a はコンパクトである. このとき

$$H_*(Z^a,\mathbb{C}) = H_*(M^a \times M^a,\mathbb{C}) \cong H_*(M^a,\mathbb{C}) \otimes H_*(M^a,\mathbb{C})$$

容易にチェックできるように, 合成積によって $H_*(Z^a,\mathbb{C})$ を代数と思ったものは, Poincaré 双対 $H_*(M^a,\mathbb{C}) \cong H^*(M^a,\mathbb{C})$ を通じて

$$\mathrm{End}(H_*(M^a,\mathbb{C}))$$

と同型になる.

特に, 既約な $H_*(Z^a,\mathbb{C})$-加群は, ただ一つ $H_*(M^a,\mathbb{C})$ だけであり, これは, $Z^a \circ M^a = M^a$ を通じた合成積による加群である.

(5.1) を通じて $H_*(M^a,\mathbb{C})$ は $\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群であるが, さらに次が証明できる.

定理 5.4. 上の条件(5.3) のもとで, $\mathbf{U}_\varepsilon(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群 $H_*(M^a,\mathbb{C})$ は既約である.

References

[1] T. Akasaka and M. Kashiwara, *Finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, Publ. RIMS **33** (1997), 839–867.

[2] M.F. Atiyah, *Convexity and commuting hamiltonians*, Bull. London Math. Soc. **14** (1982), 1–15.

[3] M.F. Atiyah and R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Phil. Trans. Roy. Soc. London A **308** (1982), 524–615.

[4] P. Baum, W. Fulton and R. MacPherson, *Riemann-Roch and topological K-theory for singular varieties*, Acta. Math. **143** (1979), 155–192.

[5] J. Beck, *Braid group action and quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **165** (1994), 555–568.

[6] A. Beilinson, J. Bernstein and P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Astérisque **100** (1982)

[7] A. Bialynicki-Birula, *Some theorems on actions of algebraic groups*, Ann. of Math. **98** (1973), 480–497.

[8] J. Carrell and A. Sommese, *$\mathbb{C}^*$-actions*, Math. Scand. **43** (1978/79), 49–59.

[9] V. Chari and A. Pressley, *Fundamental representations of Yangians and singularities of R-matrices*, J. reine angew Math. **417** (1991), 87–128.

[10] ———, *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[11] ———, *Quantum affine algebras and their representations* in "Representation of Groups", CMS Conf. Proc., **16**, AMS, 1995, 59–78.

[12] ———, *Quantum affine algebras at roots of unity*, Representation theory, **1** (1997), 280–328.

[13] N. Chriss and V. Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Progress in Math. Birkhäuser, 1997.

[14] C. De Concini, G. Lusztig and C. Procesi, *Homology of the zero-set of a nilpotent vector field on a flag manifold*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 15–34.

[15] V.G. Drinfel'd, *A new realization of Yangians and quantized affine algebras*, Soviet math. Dokl. **32** (1988), 212–216.

[16] G. Ellingsrud and S.A. Strømme, *Towards the Chow ring of the Hilbert scheme of* $\mathbb{P}^2$, J. reine angew. Math. **441** (1993), 33–44.

[17] E. Frenkel and N. Reshetikhin, *The q-characters of representations of quantum affine algebras and deformations of* $\mathcal{W}$*-algebras*, preprint, math.QA/9810055.

[18] W. Fulton, *Intersection Theory*, A Series of Modern Surveys in Math. 2, Springer-Verlag, 1984.

[19] V. Ginzburg, $\mathfrak{g}$*-modules, Springer's representations and bivariant Chern classes*, Adv. in Math. **63** (1986), 1–48.

[20] V. Ginzburg and E. Vasserot, *Langlands reciprocity for affine quantum groups of type* A_n, International Math. Research Notices (1993) No.3, 67–85.

[21] V. Ginzburg, M. Kapranov and E. Vasserot, *Langlands reciprocity for algebraic surfaces*, Math. Res. Letters **2** (1995), 147–160.

[22] I. Grojnowski, *Affinizing quantum algebras: From D-modules to K-theory*, preprint, 1994.

[23] ———, *Instantons and affine algebras I: the Hilbert scheme and vertex operators*, Math. Res. Letters **3** (1996), 275–291.

[24] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Y. Yamada, *Remarks on fermionic formula*, preprint, math.QA/9812022.

[25] D. Kazhdan and G. Lusztig, *Proof of the Deligne-Langlands conjecture for Hecke algebras*, Invent. Math. **87** (1987), 153–215.

[26] A. King, *Moduli of representations of finite dimensional algebras*, Quarterly J. of Math. **45** (1994), 515–530.

[27] M. Kleber, *Finite dimensional representations of quantum affine algebras*, preprint, math.QA/9809087.

[28] P.B. Kronheimer and H. Nakajima, *Yang-Mills instantons on ALE gravitational instantons*, Math. Ann. **288** (1990), 263–307.

[29] G. Lusztig, *Green polynomials and singularities of unipotent classes*, Adv. in Math. **42** (1981), 169–178.

[30] ———, *Equivariant K-theory and representations of Hecke algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985), 337–342.

[31] ———, *Cuspidal local systems and graded Hecke algebras. I*, Publ. Math. IHES **67** (1988), 145–202.

[32] ———, *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 447–498.

[33] ———, *Quivers, preverse sheaves, and quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 365–421.

[34] ———, *Affine quivers and canonical bases*, Publ. Math. IHES **76** (1992), 111–163.

[35] ———, *Introduction to quantum group*, Progress in Math. **110**, Birkhäuser, 1993.

[36] ———, *Cuspidal local systems and graded Hecke algebras. II*, in "Representation of Groups", CMS Conf. Proc., **16**, AMS, 1995, 217–275.

[37] ———, *On quiver varieties*, Adv. in Math. **136** (1998), 141–182.

[38] ———, *Bases in equivariant K-theory. II*, Representation Theory **3** (1999), 281–353.

[39] ———, *Quiver varieties and Weyl group actions*, preprint.

[40] I.G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials (2nd ed.)*, Oxford Math. Monographs, Oxford Univ. Press, 1995.

[41] A. Maffei, *Quiver varieties of type A*, preprint, math.AG/9812142.

[42] D. Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, Third Enlarged Edition, Springer-Verlag, 1994.

[43] H. Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, Duke Math. **76** (1994), 365–416.

[44] ———, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Math. **91** (1998), 515–560.

[45] ———, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, Univ. Lect. Ser. **18**, AMS, 1999.

[46] Y. Saito, *Quantum toroidal algebras and their vertex representations*, Publ. RIMS **34** (1998), 155–177.

[47] Y. Saito, K. Takemura, and D. Uglov, *Toroidal actions on level* 1 *modules of* $U_q(\widehat{\mathrm{sl}}_n)$, Transform. Group **3** (1998), 75–102.

[48] R. Sjamaar and E. Lerman, *Stratified symplectic spaces and reduction*, Ann. of Math. **134** (1991), 375–422.

[49] R. Sjamaar, *Holomorphic slices, sympletic reduction and multiplicities of representations*, Ann. of Math. **141** (1995), 87–129.

[50] T. Tanisaki, *Hodge modules, equivariant K-theory and Hecke algebras*, Publ. RIMS **23** (1987), 841–879.

[51] R. Thomason, *Algebraic K-theory of group scheme actions*, in "Algebraic Topology and Algebraic K-theory", Ann. of Math. Studies **113** (1987), 539–563.

[52] ———, *Equivariant algebraic vs. topological K-homology Atiyah-Segal style*, Duke Math. **56** (1988), 589–636.
[53] ———, *Une formule de Lefschetz en K-théorie équivariante algébrique*, Duke Math. **68** (1992), 447–462.
[54] M. Varagnolo and E. Vasserot, *Double-loop algebras and the Fock space*, Invent. Math. **133** (1998), 133–159.
[55] ———, *On the K-theory of the cyclic quiver variety*, preprint, math.AG/9902091.
[56] E. Vasserot, *Affine quantum groups and equivariant K-theory*, Transformation Groups **3** (1998), 269–299.

Department of Mathematics, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan
E-mail address: nakajima@kusm.kyoto-u.ac.jp